

# 基于滑动式傅里叶级数的 BDS 精密星历内插分析

廖怡平, 邓健, 陈润静, 江泽霖

(厦门理工学院, 厦门 361024)

**摘要:** 精密星历的内插是全球卫星导航系统(GNSS)高精度定位数据处理的重要工作之一,其内插的精度也直接影响着定位精度.本文综合滑动式插值理论与傅里叶级数算法,通过采用不同阶数的傅里叶级数和 9 阶切比雪夫多项式拟合内插北斗卫星导航系统(BDS)中的地球同步轨道(GEO)卫星、倾斜地球同步轨道(IGSO)卫星、中圆轨道(MEO)卫星精密星历,来分析傅里叶级数插值在 BDS 精密星历内插中的插值效果.实验表明,不同阶数,傅里叶级数内插效果不同.其中,采用 3 阶傅里叶级数 GEO 卫星与 IGSO 卫星精密星历内插精度最高,达到毫米级精度, MEO 卫星在采用 4 阶傅里叶级数时内插精度最高,达到厘米级精度.对比两种不同内插算法,9 阶切比雪夫拟合更适用于 GEO 卫星与 IGSO 卫星,而 MEO 卫星使用傅里叶级数插值精度更高.

**关键词:** 精密星历;傅里叶级数;切比雪夫拟合;滑动式插值

**中图分类号:** P228.4      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1008-9268(2020)06-0074-06

## 0 引言

卫星位置在全球卫星导航系统(GNSS)导航定位应用中有着至关重要的作用,其精度直接关系到终端定位精度<sup>[1]</sup>.精密星历可以获取高精度的卫星位置,但精密星历给出的卫星位置间隔一般是 15 min.若要得到间隔更小的卫星位置就要使用插值法进行精密星历内插.

内插所用的数学模型不同,其效果和精度也大不相同,目前常用的内插方法有拉格朗日多项式插值、切比雪夫多项式拟合、牛顿多项式插值、三角函数插值、内维尔插值等.文献[2]总结了拉格朗日插值、切比雪夫拟合和内维尔插值原理,并内插不同 GNSS 的精密星历,得出了每种系统最适合的插值法;为了得到不同阶的拉格朗日插值使用范围,文献[3]使用多种高阶拉格朗日插值模型对 GPS 精密星历进行内插;文献[4]通过改变多种插值因素,比较了拉格朗日插值和牛顿多项式插值作用于国际 GNSS 服务(IGS)精密星历的效果;文献[5]实

现了切比雪夫多项式和拉格朗日多项式插值在 GPS 精密星历插值中的应用,并根据实验数据分析比较了不同阶次多项式对两种插值方法的精度影响;文献[6]使用 3 种多项式拟合处理北斗卫星导航系统(BDS)精密星历,获得了不同轨道卫星与拟合方法的关系,为了解决插值法中存在的“龙格”现象;文献[7]使用滑动式切比雪夫多项式拟合法,通过改变计算使用的节点数与多项式阶数,来确认滑动式切比雪夫多项式拟合是否适合 BDS 中不同类型精密星历,结论表明滑动式 9 阶切比雪夫多项式拟合基本满足定位精度要求.

傅里叶插值法是由三角形形式傅里叶展开式变换得来的,它的计算复杂程度与常用的插值法对比相差不大,但目前对傅里叶插值应用于 BDS 精密星历的研究较少.因此,本文将基于傅里叶插值的原理,结合滑动式插值方法内插 BDS 地球同步轨道(GEO)、倾斜地球同步轨道(IGSO)、中圆轨道(MEO)三种类型精密星历,并通过实验数据进行对比分析.

收稿日期: 2020-09-21

资助项目: 福建省自然科学基金(2019J01852, 2018J01480)

通信作者: 邓健 E-mail: dengjian163@126.com

## 1 傅里叶级数插值

### 1.1 傅里叶级数插值原理

傅里叶级数插值的基本形式为

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x_n) + b_n \sin(n\omega x_n)). \quad (1)$$

式中:  $f(x)$  为连续的周期函数, 周期为  $T$ ; 角频率  $\omega = 2\pi/T$ ;  $a_0, a_i, b_i (1 \leq i \leq n)$  为傅里叶系数.

对精密星历做内插, 其本质是建立坐标与时间之间的函数关系. 将时间  $t$  作为自变量, 三维坐标  $X, Y, Z$  做因变量, 以  $X$  坐标为例, 式(1)可改写为

$$X = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t)). \quad (2)$$

BDS 卫星运动周期为 24 h, 即  $T$  为 24 h,  $n$  为阶数,  $t$  为插值时间, 则式(2)中只有傅里叶系数需要计算. 对于傅里叶系数, 可以使用已知点去计算, 通过已知点的时间和坐标可以列出以下多项式<sup>[8]</sup>:

$$\begin{cases} X_1 = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(i\omega t_1) + b_i \sin(i\omega t_1)) \\ \vdots \\ X_j = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(i\omega t_j) + b_i \sin(i\omega t_j)) \\ \vdots \\ X_n = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(i\omega t_n) + b_i \sin(i\omega t_n)). \end{cases} \quad (3)$$

多项式可以写成矩阵

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}b. \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{T}$  为时间计算的矩阵系数;  $b$  为傅里叶系数;  $\mathbf{X}$  为已知点  $X$  方向坐标; 只需要简单的求逆即可求出傅里叶系数

$$b = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}. \quad (5)$$

将傅里叶级数代入式(1)中可得插值坐标, 同理  $Y, Z$  也可用同样方法求出.

对于计算结果, 本文使用两种精度指标, 分别是点位中误差和均方根(RMS)进行分析, 点位中误差计算公式

$$m = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}. \quad (6)$$

式中,  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  分别表示  $X, Y, Z$  三个方向的误差.

以  $X$  方向误差为例, RMS 计算公式

$$R = \sqrt{\frac{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \cdots + \Delta X_n^2}{n}}. \quad (7)$$

式中:  $n$  代表历元个数;  $\Delta X_n^2$  表示第  $n$  个历元  $X$  方向误差. 同理,  $Y, Z$  点位中误差  $m$  的 RMS 也可用同样方法求出.

### 1.2 滑动式插值法

滑动式插值是近年来关于精密星历内插的主要方法<sup>[9-10]</sup>, 该方法主要是为了处理插值函数中严重的“龙格”现象. “龙格”现象发生于因拟合阶数过高, 使得拟合效果在已知点处非常好, 但在其他点(或未知点)处可能会造成异常大的差异. 滑动式插值原理就是在进行内插时不断改变插值区间, 使插值时间一直位于区间中央, 以此来提高插值精度和避免“龙格”现象.

## 2 BDS 精密星历内插分析

从武汉大学 IGS 数据中心下载的 2020 年 7 月 18 号 00:00:00—23:45:00 的 15 min 间隔精密星历文件, 其包含 BDS 的 3 种不同轨道类型卫星, 3 种不同轨道的卫星分别选取多颗卫星作为实验目标, GEO 类型卫星选取 3 颗, 为 C018、C006、C011; IGSO 类型卫星选取 3 颗, 为 C010、C017、C019; 因文件中 MEO 类型卫星有北斗三号(BDS-3)与北斗二号(BDS-2)两种, 故两种类型分别选取 2 颗卫星, 分别为 C202、C206 和 C012、C013.

本次实验选取的插值节点间隔为 30 min. 将每小时的第 15 分钟和第 45 分钟时刻卫星坐标从精密星历中剔除. 使用 MATLAB 编程实现傅里叶插值, 并读取精密星历文件进行插值计算. 计算中每小时整点和第 30 分钟时刻的坐标作为已知插值节点, 将每小时的第 15 分钟和第 45 分钟时刻卫星坐标作为计算目标. 将计算结果与所删坐标做差值, 用来分析插值效果.

相同的插值法在阶数不同的情况下, 插值结果的差异是很大的, 而影响插值结果的因素还有卫星轨道类型等因素. 本文首先对比 3 种类型的卫星在不同阶数的滑动式傅里叶级数插值结果, 选出最优阶数, 然后将其与目前常用的切比雪夫拟合进行对比, 以此得到傅里叶级数插值在 BDS 精密星历内插中的实际效果.

### 2.1 不同阶数的傅里叶插值精度分析

表 1 是 3 颗 GEO 卫星在使用多阶傅里叶插值后的  $X, Y, Z$  的 RMS 值, 可以看出, 在 3~6 阶时, GEO 卫星随着阶数增加插值效果越来越差.  $X, Y, Z$  坐标分量残差在 3 阶达到最佳, 其精度可以达到 mm 级. 当阶数提升, 坐标分量中误差发生较大变

化,精度迅速下降,每个阶数之间相差一个数量级的精度.总体上,GEO卫星精密星历使用3阶傅里

叶插值效果最佳.图1给出了C018卫星3阶插值时的三维坐标残差.

表1 GEO卫星不同阶数傅里叶插值RMS

mm

| 阶数 | C018   |          |       | C006     |        |       | C011   |          |       |
|----|--------|----------|-------|----------|--------|-------|--------|----------|-------|
|    | X      | Y        | Z     | X        | Y      | Z     | X      | Y        | Z     |
| 3  | 0.74   | 1.39     | 0.37  | 1.18     | 0.57   | 0.42  | 0.89   | 1.28     | 0.44  |
| 4  | 6.13   | 23.95    | 0.53  | 20.54    | 7.24   | 0.49  | 11.31  | 18.30    | 0.62  |
| 5  | 70.98  | 168.57   | 4.07  | 176.46   | 61.21  | 2.19  | 95.78  | 133.09   | 4.17  |
| 6  | 569.56 | 1 977.31 | 45.85 | 1 524.36 | 498.01 | 24.58 | 931.17 | 1 504.41 | 23.15 |

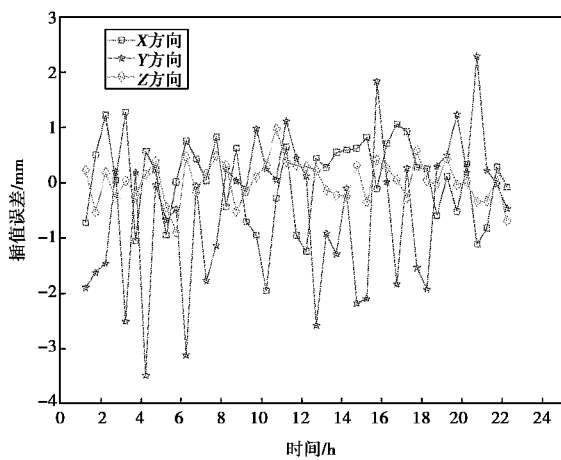


图1 C018卫星3阶傅里叶级数插值残差

表2是3颗IGSO卫星精密星历在使用3~6阶傅里叶插值的插值结果,可以看出,IGSO卫星精密星历内插在3~6阶傅里叶插值中,插值效果随着阶数增加精度迅速降低.当阶数为3时,三维坐标方向残差可以达到毫米级,当阶数提升至4时,X方向残差变化不大,Y、Z方向残差增加.在6阶时,精度达到米级,不能达到内插精度要求.总体上,IGSO卫星精密星历使用3阶傅里叶插值效果最佳.图2仅给出了C010卫星在该阶插值法的残差图像.可以看出,图2中的图像两端发生波动,初步分析产生了“边际效应”,即已知拟合节点分布不均匀,两端处的拟合效果变差.

表2 IGSO卫星不同阶数傅里叶插值RMS

mm

| 阶数 | C010   |          |          | C017   |          |        | C019   |          |          |
|----|--------|----------|----------|--------|----------|--------|--------|----------|----------|
|    | X      | Y        | Z        | X      | Y        | Z      | X      | Y        | Z        |
| 3  | 5.99   | 7.14     | 5.61     | 8.56   | 7.88     | 6.22   | 7.47   | 7.12     | 5.14     |
| 4  | 3.50   | 19.84    | 13.13    | 3.92   | 13.40    | 12.94  | 8.66   | 20.12    | 14.69    |
| 5  | 34.28  | 182.12   | 114.43   | 32.77  | 115.91   | 120.17 | 86.78  | 129.63   | 119.91   |
| 6  | 278.66 | 1 358.91 | 1 145.49 | 360.87 | 1 404.66 | 767.27 | 622.90 | 1 330.02 | 1 415.62 |

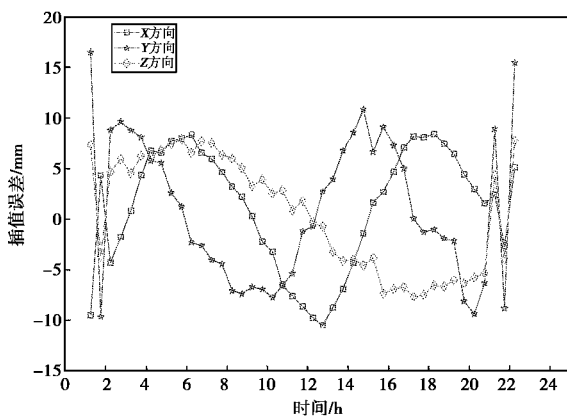


图2 C010卫星3阶傅里叶级数插值残差

表3和表4分别是BDS-3和BDS-2MEO卫星精密星历使用不同阶数傅里叶插值处理后的方向分量中误差.从卫星型号来说,使用傅里叶插值内插BDS-3卫星与BDS-2卫星精密星历,其中误差相差不大,可以归为一起讨论.与GEO卫星和IGSO卫星不同,MEO卫星在3~6阶插值的精度是先增后减.其3阶插值结果的坐标分量中误差相比4阶甚至5阶更差,但当阶数为4时,中误差变为3~6阶插值法中最小,精度达到厘米级,5阶插值法相比4阶精度变低,其数值增大3倍左右.阶数为6时,中误差达到最大值,达到米级,不能达到内插精度要求.总体上,MEO卫星精密星历使用4

阶傅里叶插值效果最佳. 图 3 和图 4 给出了 BDS-3 与 BDS-2 MEO 卫星在最佳阶数下傅里叶插值残差.

表 3 BDS-3 MEO 卫星不同阶数傅里叶插值 RMS mm

| 阶数 | C202   |        |        | C206   |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | X      | Y      | Z      | X      | Y      | Z      |
| 3  | 580.00 | 520.35 | 351.15 | 486.57 | 516.59 | 411.87 |
| 4  | 19.30  | 21.16  | 20.78  | 16.60  | 18.01  | 23.08  |
| 5  | 65.12  | 76.91  | 69.06  | 78.15  | 57.52  | 83.42  |
| 6  | 575.16 | 744.26 | 679.75 | 568.27 | 581.75 | 807.97 |

表 4 BDS-2 MEO 卫星不同阶数傅里叶插值中误差 mm

| 阶数 | C012   |        |        | C013   |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | X      | Y      | Z      | X      | Y      | Z      |
| 3  | 575.46 | 549.91 | 400.90 | 549.02 | 592.48 | 355.36 |
| 4  | 21.33  | 18.44  | 22.30  | 22.48  | 21.90  | 21.23  |
| 5  | 66.60  | 56.55  | 76.92  | 74.57  | 66.03  | 75.70  |
| 6  | 597.12 | 613.87 | 952.07 | 977.44 | 577.15 | 868.71 |

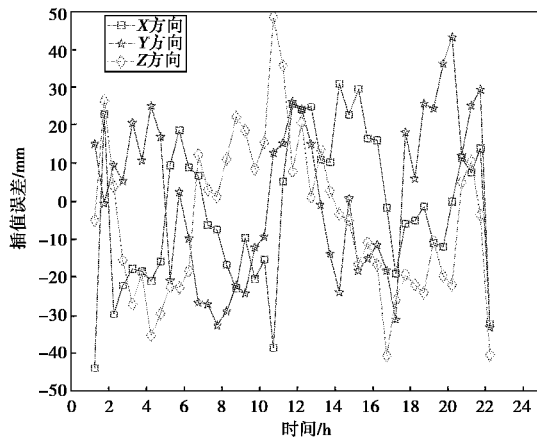


图 3 C202 号卫星 4 阶傅里叶插值残差

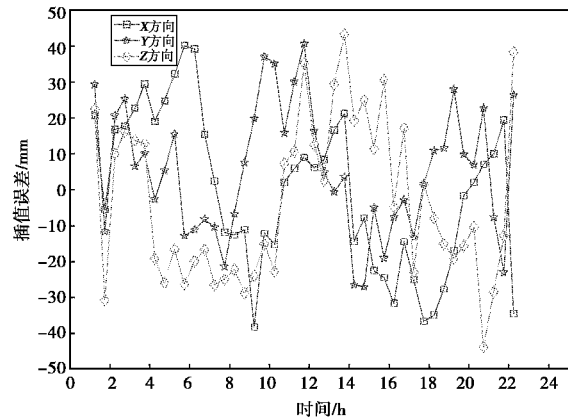


图 4 C012 号卫星 4 阶傅里叶插值残差

### 2.2 切比雪夫拟合精度分析

通过 2.1 节分析可以看出,若要使用傅里叶插值处理 BDS 的 GEO、IGSO、MEO 卫星精密星历,精度最高的阶数分别是 3 阶、3 阶、4 阶. 9 阶切比雪夫多项式拟合是目前常用的几种插值法之一,它的插值精度能满足目前大多数需求. 为此,本文用 9 阶切比雪夫拟合处理相同的卫星,并对比 3 种卫星阶数最优的傅里叶插值法与 9 阶切比雪夫拟合效果. 图 5 是 3 种卫星分别使用最合适的傅里叶插值和 9 阶切比雪夫拟合的点位中误差. 图 5 中的曲线较为平滑,中点至两端的曲线波动较小,没有产生“龙格”现象,初步分析滑动式插值有效避免了“龙格”现象的发生.

图 5(a)是 3 阶傅里叶插值和 9 阶切比雪夫多项式拟合处理 C018 号 GEO 卫星精密星历每个插值时间的点位中误差. 其中,切比雪夫拟合的 RMS 为 0.67 mm, 3 阶傅里叶插值的 RMS 为 1.61

mm. 可以明显看出,在处理 GEO 卫星精密星历方面傅里叶插值在绝大多数插值时间上的精度都比切比雪夫拟合低,原因可能是插值节点太少,3 阶傅里叶插值所用节点为 7 个,切比雪夫拟合所用节点至少要 10 个. 在处理 GEO 卫星上,切比雪夫拟合和 3 阶傅里叶插值均较为稳定,都没有出现“边际效应”现象.

图 5(b)为 3 阶傅里叶插值和 9 阶切比雪夫多项式拟合处理 C010 号 IGSO 卫星精密星历的结果,图中数据为每个插值时间坐标的点位中误差. 其中,切比雪夫拟合的 RMS 为 3.38 mm, 3 阶傅里叶插值的 RMS 为 10.88 mm. 可明显看出,3 阶傅里叶插值在处理 IGSO 卫星精度不如 9 阶切比雪夫拟合,并且傅里叶插值出现了严重的“边际效应”现象,插值函数图像仅在两端产生剧烈波动. 切比雪夫拟合表现更为稳定,且精度更高.

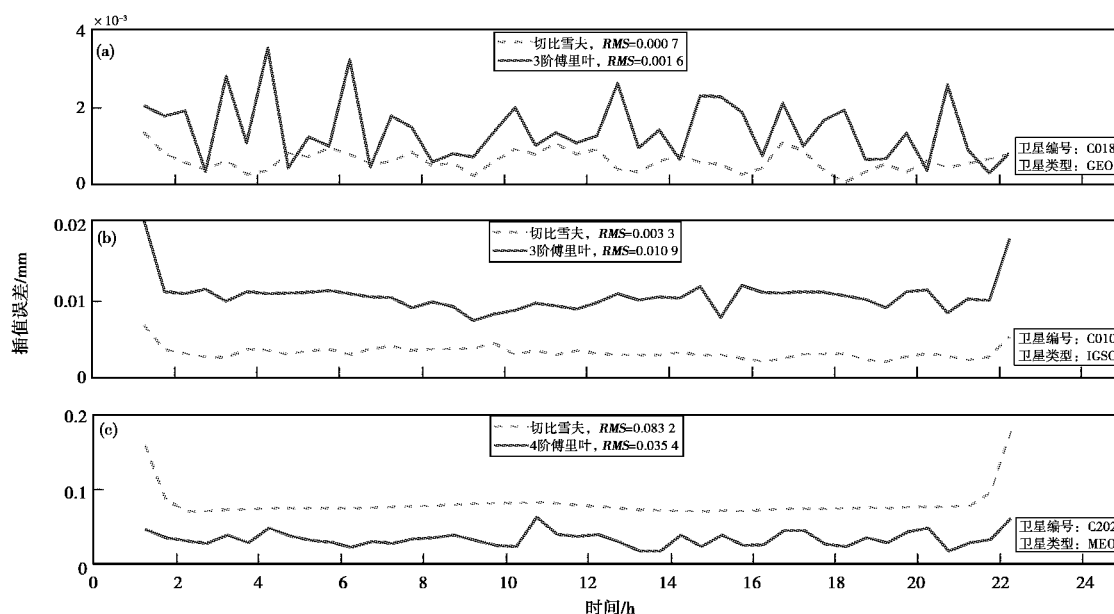


图 5 傅里叶插值与切比雪夫拟合对比结果

图 5(c) 为 C202 号 MEO 卫星精密星历 4 阶傅里叶插值与 9 阶切比雪夫多项式拟合处理结果, 结果由每个插值时间坐标的点位中误差表示. 从图 5(c) 可以看出, MEO 卫星与前两种卫星结果不同, 4 阶傅里叶插值的精度比 9 阶切比雪夫拟合更高. 其中, 切比雪夫拟合的 RMS 为 83.17 mm, 3 阶傅里叶插值的 RMS 为 35.37 mm. 从图 5(c) 中的函数来看, 切比雪夫拟合两端出现严重的波动, 即“边际效应”现象, 4 阶傅里叶插值则更为稳定.

### 3 结束语

本文通过改变傅里叶级数插值的阶数, 对 BDS 的 GEO 卫星、IGSO 卫星、MEO 卫星精密星历进行内插, 并分析其结果, 通过分析可知:

1) 不同阶数的傅里叶级数插值在处理 BDS 精密星历上, 精度最高可以达到毫米级. 对于不同类型的卫星, 达到最高精度的插值阶数也不同. 对于 GEO 卫星与 IGSO 卫星精密星历, 3 阶插值法最适合, 精度最高可以达到毫米级. 对于 MEO 卫星精密星历, 不管是 BDS-3 卫星还是 BDS-2 卫星的精密星历, 4 阶插值法最适合, 精度可以达到厘米级. 总体上, 该算法可以适用于 BDS 精密星历内插.

2) 9 阶切比雪夫多项式拟合与傅里叶级数插值采用滑动式插值法可以有效避免“龙格”现象的发生, 但无法解决两端因为拟合节点分布不均匀所

带来的“边际效应”.

3) 9 阶切比雪夫多项式拟合同样可以达到毫米级以上的精度. 在处理 BDS 卫星上, 切比雪夫拟合在 GEO 卫星与 IGSO 卫星表现相比 3 阶傅里叶插值更好, 精度更高, 但就计算来说, 切比雪夫拟合的数学模型更复杂; 而对于 MEO 卫星, 4 阶傅里叶插值效果优于 9 阶切比雪夫.

### 参考文献

- [1] 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 3 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2016.
- [2] 李天驰, 王果. 多模 GNSS 卫星轨道插值方法研究[J]. 河南工程学院学报(自然科学版), 2020, 32(2): 38-44.
- [3] 鹿德凯, 姜本朋, 曹景庆, 等. 基于拉格朗日多项式的精密星历坐标插值[J]. 北京测绘, 2015(2): 59-62.
- [4] 付英, 秦长坤. 两种 IGS 精密星历插值方法的精度探究[J]. 测绘与空间地理信息, 2018, 41(10): 160-162.
- [5] 刘刚, 邵楠. 两种 IGS 精密星历多项式插值方法的比较分析[J]. 城市勘测, 2012(1): 107-109, 119.
- [6] 苏怡婷, 肖琴琴. 利用精密星历计算北斗卫星坐标的方法探讨[J]. 湖南城市学院学报(自然科学版), 2018, 27(6): 57-62.
- [7] 李振昌, 李仲勤. 滑动式切比雪夫多项式拟合法在 BDS 精密星历内插中的应用[J]. 测绘工程, 2019, 28(4): 49-53.
- [8] 赵娜. 一种新的 GPS 精密星历插值方法[J]. 北京测绘, 2018, 32(2): 186-189.

- [9] 从建锋,刘智敏,刘盼,等. 基于非滑动式与滑动式 BDS 精密星历内插及其精度分析[J]. 测绘工程, 2019, 28(6): 22-29
- [10] 李彤,魏自来. 滑动式切比雪夫插值算法在精密星历内插中的研究[J]. 测绘与空间地理信息, 2019, 42(3): 158-161.

#### 作者简介

廖怡平 (1998—),男,硕士研究生,研究方向为 GNSS 导航定位开发与应用.

邓健 (1981—),男,博士,副教授,研究方向为全球卫星导航定位技术开发与应用.

陈润静 (1985—),男,博士,副教授,研究方向为空间大地测量学.

## Interpolation analysis of BDS precision ephemeris based on sliding Fourier series

LIAO Yiping, DENG Jian, CHEN Runjing, JIANG Zelin

(Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China)

**Abstract:** The interpolation of precise ephemeris is one of the important tasks of GNSS data processing, and its interpolation accuracy also directly affects the positioning accuracy. This paper integrates sliding interpolation theory and Fourier series algorithm, and uses different orders of Fourier series and 9th-order Chebyshev polynomials to fit and interpolate the precision ephemeris of GEO satellite, IGSO satellite, MEO satellite in BDS so as to analyze the interpolation effect of Fourier series interpolation in BDS precision ephemeris interpolation. Experiments show that GEO satellites and IGSO satellites have the highest degree of accuracy when the order of Fourier series is 3, reaching millimeter accuracy. And MEO satellites have the highest accuracy when the order is 4, reaching centimeter accuracy. Compared result shows that 9-order chebyshev fitting in precise ephemeris of GEO satellites and IGSO satellites has higher accuracy, while Fourier series interpolation in that of MEO satellites has higher accuracy.

**Keywords:** precision ephemeris; Fourier series; Chebyshev fitting; sliding interpolation