

# GNSS/INS 紧组合最大熵卡尔曼滤波算法

李松, 唐小妹, 孙鹏跃, 张可, 王飞雪

(国防科技大学 电子科学学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 针对实际环境中量测噪声易被野值污染而呈现非高斯分布, 进而导致传统卡尔曼滤波(KF)算法性能降低的问题, 提出了最大熵卡尔曼滤波(MCKF)算法. 该算法基于最大熵准则(MCC)和 M 估计的思想推导得到. 与 KF 相比, 所提算法能够给异常量测值分配较小的权重以减轻其对于状态估计的影响, 与基于 Huber 函数的卡尔曼滤波(HKF)算法相比, 其能够更有效地利用量测信息, 因此所提算法相比于 KF 和 HKF 而言更加鲁棒. 在全球卫星导航系统(GNSS)与惯性导航系统(INS)的紧组合模式下进行车载实测实验, 由于 GNSS 的伪距与伪距率等原始量测信息质量不佳, 因此 KF 和 HKF 的性能均受到影响, 而所提 MCKF 算法能够有效地抑制异常量测值的影响, 能够更快地收敛且得到更高的估计精度.

**关键词:** 卡尔曼滤波; GNSS/INS; 紧组合; M 估计; 最大熵准则

**中图分类号:** P228.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1008-9268(2020)04-0001-08

## 0 引言

GNSS/INS 组合导航系统通过数据融合能够克服单个系统存在的缺点, 例如, 全球卫星导航系统(GNSS)在遮挡环境下无法定位以及惯性导航系统(INS)随时间的误差累积问题. GNSS/INS 组合导航又分为松组合与紧组合, 其中紧组合利用伪距、伪距率等原始量测信息, 能够在可视卫星少于 4 颗时保证组合系统的正常工作. 数据融合算法对于 GNSS/INS 组合导航系统的性能起着关键作用<sup>[1]</sup>. 其中, 卡尔曼滤波(KF)是应用最为广泛的数据融合算法, 且对于高斯系统而言, 其能够在最小均方误差(MMSE)准则下得到状态的最优估计. 然而, 在实际应用中, 对于 GNSS/INS 组合导航系统而言, GNSS 接收机容易受到异常干扰的影响, 并且在恶劣的环境(如城市楼宇中和树阴下)中 GNSS 的量测质量可能会降低<sup>[2]</sup>, 进而导致量测野值的存在. 因此, 系统实际面对的是非高斯的厚尾噪声<sup>[3]</sup>, 而传统的 KF 无法应对这种情况并导致估计精度降低.

目前, 能够处理非高斯噪声的滤波算法包含以下几类: 1) 序贯蒙特卡洛采样方法, 其中粒子滤

波是最常用的技术, 它使用一组带有权值的随机样本来近似状态的后验分布, 能实现对任何概率分布的近似<sup>[4]</sup>, 但其存在计算量大, 粒子退化和粒子贫乏等问题, 使其难以满足实时性的需要<sup>[5-6]</sup>; 2) 多模型滤波方法, 其中高斯和滤波算法较为典型, 在这种方法中, 用若干个高斯分布的加权来近似非高斯分布的噪声<sup>[7]</sup>, 因此, 全局状态后验估计则为若干个并行滤波算法的加权和. 然而, 这种方法同样面临计算复杂度的问题, 其计算复杂度随着子高斯项的增加而显著增加; 3) M 估计或抗差估计方法, 其通过增大异常量测值对应的量测噪声协方差矩阵元素, 能够有针对性地减轻某一测量通道的异常量测值的影响. 这类方法计算复杂度较低, 比较实用, 并已成功运用于组合导航领域. 比如, 文献[8]基于 IGGIII 模型构建的抗差 KF 算法能够抑制紧组合的伪距和载波相位量测野值的影响. 然而, 如果量测野值较大, 则会影响这类方法对于异常量测值的检测, 进而导致其性能降低. 文献[9]利用新息构造检测量, 利用 Huber 函数计算等价协方差矩阵, 对量测野值具有一定的抑制作用, 但其无法将明显异常的量测值完全丢弃, 并且对于近似正常的量测值分配的权重较小, 难以充分利用量

收稿日期: 2020-06-04

通信作者: 王飞雪 E-mail: wangfeixue\_nnc@163.com

测信息。

因此,为了提高滤波算法在实际环境下的鲁棒性,有必要开发新的鲁棒滤波算法。近年来,由于相关熵包含信号的高阶统计信息,文献[10-11]将相关熵的概念引入到滤波算法的设计中,基于最大熵准则(MCC)推导了一系列最大熵滤波算法,并证明了其在非高斯噪声环境下的鲁棒性。然而,由于这些滤波算法是通过修改卡尔曼增益而非量测噪声协方差矩阵,因此对于 GNSS/INS 紧组合导航而言,其无法有针对性地抑制某颗卫星的异常量测值,因此在实际应用中表现不佳。

本文基于 MCC 和 M 估计的思想,将相关熵的概念引入 KF 的代价函数中,推导了最大熵卡尔曼滤波(MCKF)算法。该算法结合了最大熵方法和 M 估计方法的优点,与传统 KF 相比,所提算法通过权矩阵修改了量测噪声协方差矩阵,使得异常量测值能够被分配较小的权重,与函数的卡尔曼滤波(HKF)相比,其能够更有效地利用量测信息,因此所提算法更加鲁棒。通过 GNSS/INS 紧组合车载实测实验,证明了所提算法在实际环境下的鲁棒性,结果表明其能够得到更高的估计精度。

## 1 最大熵卡尔曼滤波

本节首先介绍 MCC 的概念,然后基于 M 估计的思想,将其与 KF 的代价函数结合,进而推导出所提 MCKF 算法,最后对算法的鲁棒性进行分析。

### 1.1 最大熵准则

考虑随机变量  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$ ,两者之间的相关熵定义为

$$V(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E[\kappa(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \iint \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{x} \mathrm{d}\mathbf{y}, \quad (1)$$

式中: $E$ 表示求期望; $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示随机变量  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  的联合概率密度函数; $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示核函数。

由于实际情况中联合概率密度  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  难以精确获得,一般可用样本的平均值来计算相关熵的估计值:

$$\hat{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa(x_i, y_i), \quad (2)$$

式中: $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$  为满足联合概率密度  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的  $N$  个样本。

通常将核函数选取为高斯核函数,即

$$\kappa(x_i, y_i) = G_\sigma(e_i) = \exp\left(-\frac{e_i^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3)$$

式中, $e_i = x_i - y_i$ ;  $\sigma$  为核函数带宽。

对高斯核函数进行泰勒展开,得

$$V(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} n!} E[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^{2n}], \quad (4)$$

可以看出,相关熵为  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$  的所有偶数阶矩的加权和,因此其包含了高阶矩信息。同时,当且仅当  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  时,  $V(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  取最大值 1。

### 1.2 MCKF 推导

考虑如下线性离散时间系统:

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k|(k-1)} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (5)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (6)$$

式中: $\mathbf{x}_k$  和  $\mathbf{z}_k$  分别为  $k$  时刻的  $n$  维状态向量和  $m$  维量测向量; $\Phi_{k|(k-1)}$  和  $\mathbf{H}_k$  分别为系统转移矩阵和量测矩阵; $\mathbf{w}_{k-1}$  和  $\mathbf{v}_k$  分别为相互独立且均值为零的过程噪声和量测噪声,其协方差矩阵分别为  $\mathbf{Q}_{k-1}$  和  $\mathbf{R}_k$ 。

在 MMSE 准则下,通过最小化如下的代价函数可以得到 KF 的递推表达式。

$$J_{\text{KF}} = \min(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}\|_{\mathbf{P}_{k|(k-1)}^{-1}}^2 + \|\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_k\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2). \quad (7)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}$  表示状态向量  $\mathbf{x}_k$  的先验估计; $\mathbf{P}_{k|(k-1)}$  表示先验误差协方差矩阵; $\|\mathbf{x}\|_A^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ,上标 T 表示转置。

定义  $\mathbf{e}_k = \mathbf{R}_k^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_k)$ ,式(7)可以写为

$$J_{\text{KF}} = \min(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}\|_{\mathbf{P}_{k|(k-1)}^{-1}}^2 + \sum_{i=1}^m e_{k,i}^2). \quad (8)$$

式中, $e_{k,i}$  表示  $\mathbf{e}_k$  的第  $i$  个分量,  $i = (1, \dots, m)$ 。可以看出,在 MMSE 准则下, KF 的代价函数对于所有量测量的残差分配相等的权值,因此其无法减轻异常量测值的影响。

为了增强滤波算法在非高斯量测噪声下的鲁棒性,基于 M 估计的思想,将相关熵的概念引入代价函数的量测部分,将式(8)的代价函数修改为

$$J_{\text{MCKF}} = \min(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}\|_{\mathbf{P}_{k|(k-1)}^{-1}}^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^m G_\sigma(e_{k,i})). \quad (9)$$

可以看出,式(9)用核函数代替了 KF 中量测误差部分的 MMSE 估计。

对式(9)在  $\mathbf{x}_k$  处求导,并令其为零,得

$$\mathbf{P}_{k|(k-1)}^{-1}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}) + \sum_{i=1}^m G_\sigma(e_{k,i}) e_{k,i} \frac{\partial e_{k,i}}{\partial \mathbf{x}_k} = 0. \quad (10)$$

式(10)可以进一步写为如下的矩阵形式:

$$\mathbf{P}_{k|(k-1)}^{-1}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}) + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-\frac{T}{2}} \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{e}_k = 0, \quad (11)$$

式中:  $\boldsymbol{\Psi}_k = \text{diag}[\psi(e_{k,i})]$  为权矩阵;  $\psi(e_{k,i}) = G_\sigma(e_{k,i})$  为权函数;  $\text{diag}[\cdot]$  表示取对角矩阵.

将  $\mathbf{e}_k$  的表达式代入式(11),得

$$\mathbf{P}_{k|(k-1)}^{-1}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}) + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-\frac{T}{2}} \boldsymbol{\Psi}_k \times \mathbf{R}_k^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_k) = 0. \quad (12)$$

式(12)可视为式(13)在  $\mathbf{x}_k$  处的导数:

$$J_{\text{MCKF}} = \min(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}\|_{\mathbf{P}_{k|(k-1)}^{-1}}^2 + \|\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_k\|_{\tilde{\mathbf{R}}_k^{-1}}^2). \quad (13)$$

式中:  $\tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{R}_k^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Psi}_k^{-1} \mathbf{R}_k^{\frac{T}{2}}$ . 对比式(13)和式(7)可看出, MCKF 在 KF 的基础上对量测噪声的协方差进行了修改, 该修改是通过权矩阵  $\boldsymbol{\Psi}_k$  来实现的.

下面总结 MCKF 的滤波流程.

#### 1) 滤波初始化

设置滤波初值  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和  $\mathbf{P}_0$ .

#### 2) 时间更新

以传统 KF 的方式求解状态的先验估计

$\hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}$  和先验误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_{k|(k-1)}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)} &= \boldsymbol{\Phi}_{k|(k-1)} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \\ \mathbf{P}_{k|(k-1)} &= \boldsymbol{\Phi}_{k|(k-1)} \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_{k|(k-1)}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \end{aligned}$$

#### 3) 量测更新

根据时间更新后所得的量测信息计算  $\mathbf{e}_k$ , 然后基于  $\mathbf{e}_k$  计算权矩阵  $\boldsymbol{\Psi}_k$ , 并用权矩阵修改量测噪声协方差矩阵:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_k = \mathbf{R}_k^{-1/2}(\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)} - \mathbf{z}_k), \\ \boldsymbol{\Psi}_k = \text{diag}[G_\sigma(e_{k,i})], \\ \tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{R}_k^{1/2} \boldsymbol{\Psi}_k^{-1} \mathbf{R}_k^{T/2}. \end{cases}$$

利用修改后的量测噪声协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_k$  计算卡尔曼增益  $\mathbf{K}_k$ , 并完成后续估计  $\hat{\mathbf{x}}_k$  和后续误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_k$  的计算:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|(k-1)} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|(k-1)} \mathbf{H}_k^T + \tilde{\mathbf{R}}_k)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|(k-1)}), \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|(k-1)}. \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{I}_n$  表示  $n \times n$  维的单位矩阵.

### 1.3 算法鲁棒性分析

将本文的基于 MCC 的权函数与文献[9]中的 Huber 权函数以及 MMSE 准则下的权函数进行对比, 结果如表 1 和图 1 所示.

表 1 不同准则下的权函数形式

准则	权函数 $\psi(e)$
MMSE	1
Huber	$\begin{cases} 1, &  e  \leq \gamma \\ \frac{\gamma}{ e }, &  e  > \gamma \end{cases}$
MCC	$\exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right)$

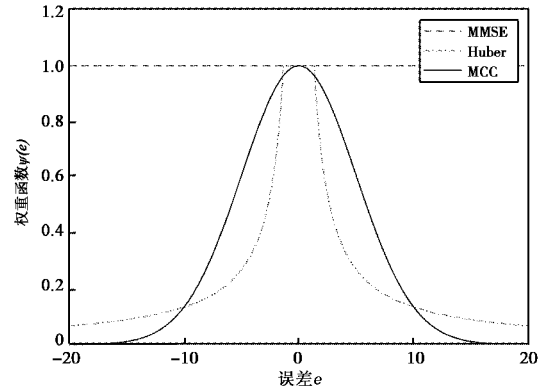


图 1 不同准则下的权函数示意图

表 1 描述了不同准则下的权函数形式, 图 1 给出了相应的权函数示意图, 其中, 本文将 Huber 函数调节因子取为  $\gamma = 1.345$ , MCC 核函数带宽取为  $\sigma = 5$ . 从图 1 可以看出, 在 MMSE 准则下的权函数  $\psi_{\text{MMSE}}(e)$  对任何量测量都分配相等的权重, 因此当存在量测野值时, KF 无法抑制异常量测值的影响, 其鲁棒性与估计精度均受到影响. 而 Huber 权函数  $\psi_{\text{Huber}}(e)$  与基于 MCC 的权函数  $\psi_{\text{MCC}}(e)$  均能够根据量测量的残差给异常量测值分配较小的权重, 因此两者均能减轻异常量测值对于状态估计的不良影响, 进而提高算法鲁棒性. 然而, 与  $\psi_{\text{Huber}}(e)$  相比,  $\psi_{\text{MCC}}(e)$  以指数形式衰减, 呈现出先慢后快的衰减趋势, 因此其能够给近似正常的量测值分配相对较大的权重以有效利用量测信息, 而对于明显异常的量测值, 其能够快速衰减到零附近, 这表明异常量测信息将被丢弃.  $\psi_{\text{Huber}}(e)$  的衰减趋势与  $\psi_{\text{MCC}}(e)$  相反, 其无法较好地利用近似正常的量测值, 且对于明显异常的量测值, 由于  $\psi_{\text{Huber}}(e)$  无法取到零附近, 因此其不能彻底丢弃异常量测信息. 因此, 相比于 HKF, MCKF 算法具有更强的鲁棒性.

## 2 GNSS/INS 紧组合模型

本文对所提算法在 GNSS/INS 紧组合实验中

进行验证,首先构建其状态模型和量测模型.

## 2.1 状态模型

本文采用 INS 在东北天导航坐标系下的误差状态模型,状态量为

$$\mathbf{x}_{\text{INS}} = [\varphi_E, \varphi_N, \varphi_U, \delta v_E, \delta v_N, \delta v_U, \delta L, \delta \lambda, \delta h, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z]^T, \quad (14)$$

式中:\$(\varphi\_E, \varphi\_N, \varphi\_U)\$表示 INS 在东北天方向的姿态误差;\$(\delta v\_E, \delta v\_N, \delta v\_U)\$表示东北天方向速度误差;\$(\delta L, \delta \lambda, \delta h)\$表示经纬高方向位置误差;\$(\varepsilon\_x, \varepsilon\_y, \varepsilon\_z)\$和\$(\nabla\_x, \nabla\_y, \nabla\_z)\$分别表示载体坐标系下陀螺仪常值漂移和加速度计零偏.

INS 的误差方程可以写为如下的微分方程

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{INS}}(t) = \mathbf{F}_{\text{INS}}(t)\mathbf{x}_{\text{INS}}(t) + \mathbf{w}_{\text{INS}}(t), \quad (15)$$

式中:\$\mathbf{F}\_{\text{INS}}(t)\$和\$\mathbf{w}\_{\text{INS}}(t)\$的具体形式可参考文献[12].由于 GNSS 接收机的钟差和钟漂会影响量测的伪距和伪距率,因此还需要对这一部分误差进行估计,GNSS 接收机的误差方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{GNSS}}(t) = \mathbf{F}_{\text{GNSS}}(t)\mathbf{x}_{\text{GNSS}}(t) + \mathbf{w}_{\text{GNSS}}(t), \quad (16)$$

式中:\$\mathbf{F}\_{\text{GNSS}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\$;\$\mathbf{x}\_{\text{GNSS}}(t) = [b\_p, b\_f]^T\$;\$b\_p\$和\$b\_f\$分别表示由 GNSS 接收机的钟差和钟漂引起的测距误差.

因此,联立式(15)和式(16),可得 GNSS/INS 紧组合的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \quad (17)$$

式中:\$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}\_{\text{INS}}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}\_{\text{GNSS}}(t) \end{bmatrix}\$;\$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}\_{\text{INS}}(t), \mathbf{x}\_{\text{GNSS}}(t)]^T\$;\$\mathbf{w}(t) = [\mathbf{w}\_{\text{INS}}(t), \mathbf{w}\_{\text{GNSS}}(t)]^T\$.

## 2.2 量测模型

将 INS 计算得到的伪距和伪距率与 GNSS 输出的伪距和伪距率作差,可得伪距差和伪距率差测量\$\mathbf{z}\_\rho\$和\$\mathbf{z}\_\dot{\rho}\$.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\rho \\ \mathbf{z}_{\dot{\rho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{\text{INS}}^1 - \rho_{\text{GNSS}}^1 \\ \vdots \\ \rho_{\text{INS}}^m - \rho_{\text{GNSS}}^m \\ \dot{\rho}_{\text{INS}}^1 - \dot{\rho}_{\text{GNSS}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\rho}_{\text{INS}}^m - \dot{\rho}_{\text{GNSS}}^m \end{bmatrix}. \quad (18)$$

式中:\$\rho\$表示伪距;\$\dot{\rho}\$表示伪距率;上标\$m\$表示卫星的数目;下标分别对应 INS 与 GNSS 计算的伪距和伪距率.式(18)中,有:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{INS}}^j &= \|\mathbf{r}_{\text{INS}} - \mathbf{r}_S^j\|, \\ \dot{\rho}_{\text{GNSS}}^j &= \|\mathbf{r}_{\text{GNSS}} - \mathbf{r}_S^j\| - b_p - v_\rho^j, \end{aligned}$$

$$\dot{\rho}_{\text{INS}}^j = \frac{(\mathbf{r}_{\text{INS}} - \mathbf{r}_S^j)^T (\mathbf{r}_{\text{INS}} - \mathbf{r}_S^j)}{\rho_{\text{INS}}^j},$$

$$\dot{\rho}_{\text{GNSS}}^j = \frac{(\mathbf{r}_{\text{GNSS}} - \mathbf{r}_S^j)^T (\mathbf{r}_{\text{GNSS}} - \mathbf{r}_S^j)}{\|\mathbf{r}_{\text{GNSS}} - \mathbf{r}_S^j\|} - b_f - v_\rho^j.$$

其中:\$\|\cdot\|\$表示向量的二范数;\$\mathbf{r}\_{\text{INS}}\$和\$\dot{\mathbf{r}}\_{\text{INS}}\$为 INS 计算得到的载体位置和速度;\$\mathbf{r}\_{\text{GNSS}}\$和\$\dot{\mathbf{r}}\_{\text{GNSS}}\$为 GNSS 输出的载体位置和速度;\$\mathbf{r}\_S^j\$和\$\dot{\mathbf{r}}\_S^j\$为第\$j\$颗卫星的位置和速度.上述变量都定义在地心地固(ECEF)坐标系中.\$v\_\rho^j\$和\$\dot{v}\_\rho^j\$为伪距和伪距率量测噪声,假定为白噪声.

将\$\dot{\rho}\_{\text{INS}}^j\$与\$\dot{\rho}\_{\text{GNSS}}^j\$在\$\mathbf{r}\_{\text{GNSS}}\$和\$\dot{\mathbf{r}}\_{\text{GNSS}}\$处进行一阶泰勒展开,因此\$\mathbf{z}\_\rho\$和\$\mathbf{z}\_{\dot{\rho}}\$可以进一步写为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\rho &= \begin{bmatrix} e_x^1 & e_y^1 & e_z^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_x^m & e_y^m & e_z^m \end{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{ALh}}^{\text{ECEF}} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} + \mathbf{I}_m b_p + \begin{bmatrix} v_\rho^1 \\ \vdots \\ v_\rho^m \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{H}_\rho \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} + \mathbf{I}_m b_p + \mathbf{v}_\rho, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{\dot{\rho}} &= \begin{bmatrix} e_x^1 & e_y^1 & e_z^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_x^m & e_y^m & e_z^m \end{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{ENU}}^{\text{ECEF}} \begin{bmatrix} \delta v_E \\ \delta v_N \\ \delta v_U \end{bmatrix} + \mathbf{I}_m b_f + \begin{bmatrix} v_\rho^1 \\ \vdots \\ v_\rho^m \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{H}_{\dot{\rho}} \begin{bmatrix} \delta v_E \\ \delta v_N \\ \delta v_U \end{bmatrix} + \mathbf{I}_m b_f + \mathbf{v}_{\dot{\rho}}. \end{aligned} \quad (20)$$

式中:\$(e\_x^j, e\_y^j, e\_z^j)^T\$表示第\$j\$颗卫星到 GNSS 的视线矢量;\$\mathbf{I}\_m\$表示\$m \times 1\$维的全一向量;\$\mathbf{C}\_{\text{ALh}}^{\text{ECEF}}\$、\$\mathbf{C}\_{\text{ENU}}^{\text{ECEF}}\$为旋转矩阵,将定义在导航坐标系的位置、速度误差转换到 ECEF 系中<sup>[14]</sup>.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{ALh}}^{\text{ECEF}} &= \begin{bmatrix} -R_1 \sin L \cos \lambda & -R_1 \cos L \sin \lambda & \cos L \cos \lambda \\ -R_1 \sin L \sin \lambda & R_1 \cos L \cos \lambda & \cos L \sin \lambda \\ R_2 \cos L & 0 & \sin L \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{ENU}}^{\text{ECEF}} &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin L \cos \lambda & \cos L \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \sin \lambda \\ 0 & \cos L & \sin L \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

式中:\$R\_1 = R\_N + h\$;\$R\_2 = R\_N(1 - e^2) + h\$;\$R\_N\$为卯酉圈曲率半径;\$e\$为地球偏心率.

因此,结合式(19)、(20)可得量测方程为

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (23)$$

其中,

$$\begin{cases} z_k = [z_\rho, z_\rho]^T, v_k = [v_\rho, v_\rho]^T, \\ H_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_\rho & 0 & I_m & 0 \\ 0 & H_\rho & 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}. \end{cases}$$

### 3 实测实验

为验证所提 MCKF 算法在 GNSS/INS 紧组合下的有效性,进行车载实测实验,在城市环境下采集了一组车载 GNSS/INS 导航实验数据,时间持续约 50 min. GNSS 数据由频率为 1 Hz 的伪距、伪距率组成,INS 数据频率为 100 Hz. INS 采用闭环校正的方式,组合周期为 1 s,每次量测更新后将状态量置为零. 初始状态协方差中位置误差设为 10 m,速度误差设为 0.1 m/s,姿态角误差设为 20°;伪距量测噪声设为 2.5 m;伪距率量测噪声设为 0.1 m/s.

图 2~3 分别示出了实验过程中的可视卫星数和三维位置精度因子(PDOP). 从图 2 可以看出,实验过程中可视卫星的数目频繁波动,且在量测时段末端,可视卫星数降为 5 颗. 从图 3 也可以看出,实验过程中的 PDOP 值波动较大,量测质量较差.

采用本文提出的 MCKF 算法与 HKF 以及 KF 分别对导航数据进行处理,不同算法的位置误差结果如图 4~6 所示. 从图 4~6 可以看出,KF 的结果含有较多突刺,这些突刺大多出现在如图 2 所示的卫星数较少的时刻和如图 3 所示的 PDOP 值较大的时刻,这表明随着量测质量下降,量测量中不可避免地存在野值,这破坏了对于噪声为高斯分布的假设,进而使得 KF 的估计性能随之下降,其位置误差最大达到了 20 m(高度方向). HKF 与 MCKF 均能够对异常量测值分配更小的权重,因此 HKF 与 MCKF 的结果更为平滑,估计性能较 KF 而言有所改善. 然而,由于 KF 无法抑制异常量测值,而 HKF 如 1.3 节所述无法有效地利用量测信息,因此两者在实验初期北向和高度方向的定位误差很大,HKF 的位置误差最大达到了 30 m(高度方向),两者均需要较长时间才能收敛. 然而,如前所述,本文提出的 MCKF 算法能够对异常量测值分配更小的权重,且相比于 HKF 能够更有效地利用量测信息,因此,从图 4~6 可以看出, MCKF 的结果在实验初期能够快速收敛,其整体结果相比于 KF 和 HKF 而言更好.

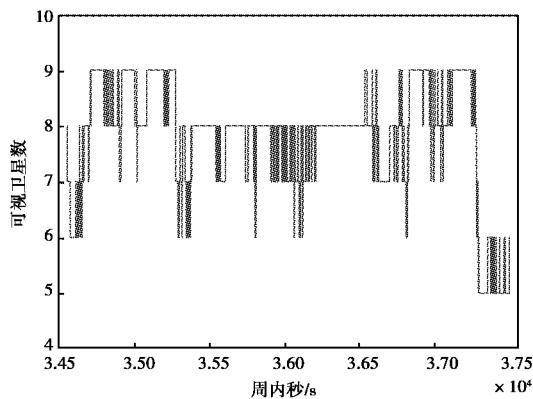


图 2 可视卫星数

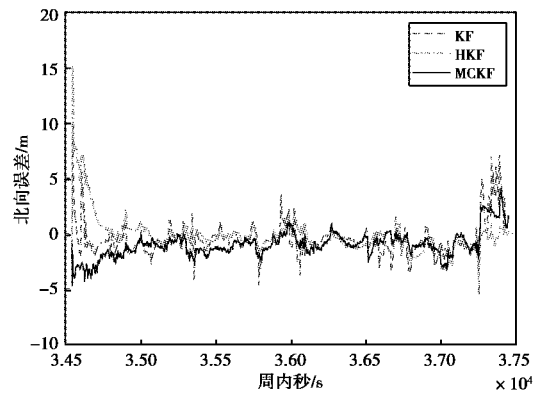


图 4 北向误差

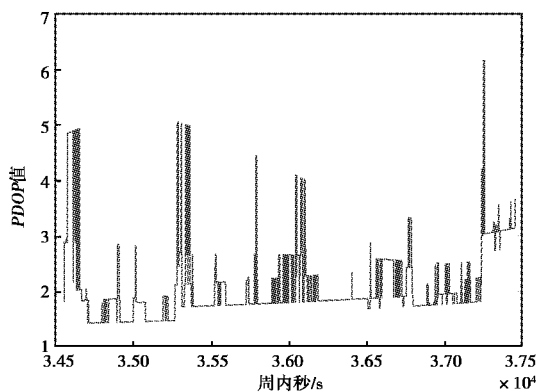


图 3 PDOP 值

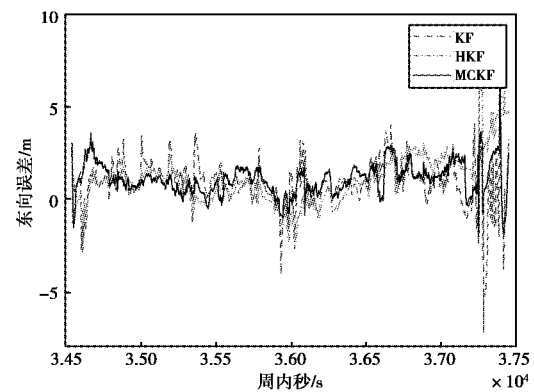


图 5 东向误差

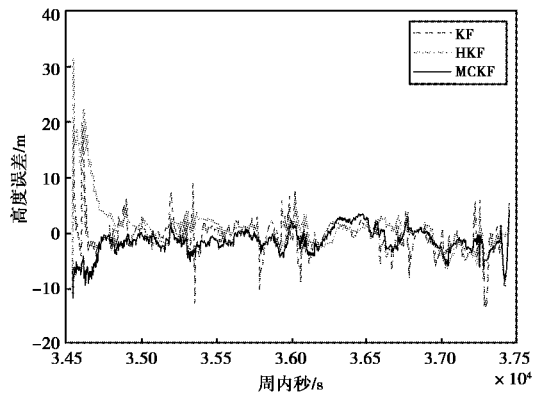


图6 高度误差

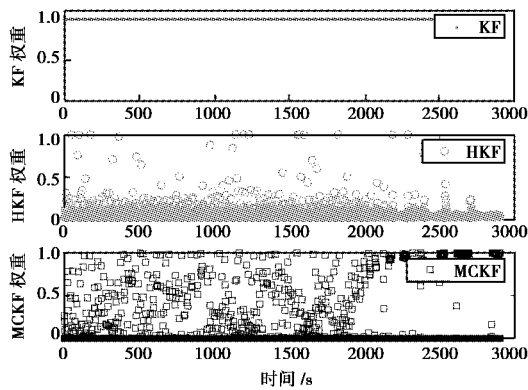


图7 不同算法对1号星伪距分配的权重

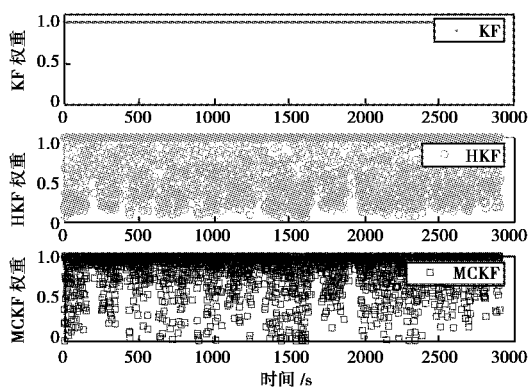


图8 不同算法对1号星伪距率分配的权重

图7~8分别示出了实验过程中不同算法对于1号星伪距与伪距率量测值分配的权重,其中1号星累计可见时长为2903s,其不可见时段在图中被忽略。从图7可以明显看出, HKF对伪距分配的权重集中在0.5以下,而MCKF分配的权重更加均匀,因此MCKF相比于HKF能更有效地利

用量测信息。从图8可以看出, HKF对伪距率分配的权重无法取到零附近,而MCKF能够近似取到零附近,因此MCKF相比于HKF能更有效地丢弃异常量测信息。因此,图7~8的结果与本节以及1.3节中对算法性能的分析是相吻合的。

表2示出了不同算法所得结果的均方根误差比较。从表2可以看出,传统KF由于无法抑制异常量测值的影响,因此其均方根误差较大, HKF能够减轻异常量测值的影响,但在实验初期收敛较慢,其性能同样受到影响,而由本节以及1.3节可知,本文提出的MCKF算法能够在充分利用量测信息的同时丢弃明显异常的量测信息,因此其对于量测野值幅度较大的场景尤其适用。对于GNSS/INS紧组合导航而言,在多径衰落环境下工作或接收机的时钟发生异常均可能导致量测伪距与伪距率有较大幅度的跳变,此时所提MCKF算法能表现出较好的鲁棒性。

表2 不同算法均方根误差比较

算法	北向	东向	高度	三维
KF	1.555	1.472	3.139	3.800
HKF	1.713	1.771	4.289	4.946
MCKF	1.536	1.413	2.752	3.454

## 4 结束语

本文基于MCC和M估计的思想,提出了MCKF算法。通过GNSS/INS紧组合车载实测实验对所提算法进行了验证,结果表明,由于实验过程中可视卫星数和PDOP值频繁波动,紧组合采用的GNSS的伪距与伪距率等原始量测信息的质量不佳使KF的收敛速度与估计精度均受到影响,且误差曲线突刺较多, HKF能够减轻异常量测值的影响,但由于无法有效利用量测信息,其在实验初期收敛较慢,整体性能也受到影响,而本文提出的MCKF算法相比于KF和HKF能够有效地抑制异常量测值的影响,从而更快地收敛,并且其误差曲线更为平滑,因此其估计精度也更高。因此,本文提出的算法在实际环境中鲁棒性更强,适用于GNSS/INS紧组合导航。

## 参考文献

- [1] NOURMOHAMMADI H, KEIGHOBADI J. Design and experimental evaluation of indirect centralized and direct decentralized integration scheme for low-cost INS/GNSS system[J]. GPS solutions, 2018, 22

- (3): 65-82. DOI:10.1007/S10291-018-0732-2.
- [2] KBAYER N, SAHMOUDI M. Performances analysis of GNSS NLOS bias correction in urban environment using a three-dimensional city model and GNSS simulator[J]. IEEE transactions on aerospace and electronic systems, 2018, 54(4): 1799-1814.
- [3] HUANG Y L, ZHANG Y G, BO X, et al. A new outlier-robust student's based Gaussian approximate filter for cooperative localization[J]. IEEE/ASME transactions on mechatronics, 2017, 22(5): 2380-2386. DOI:10.1109/TMECH.2007.2744651.
- [4] BILIK I, TABRIKIAN J. MMSE-based filtering in presence of non-Gaussian system and measurement noise[J]. IEEE transactions on aerospace and electronic systems, 2010, 46(3): 1153-1170. DOI:10.1109/TAES.2010.5545.180.
- [5] 付晨. 多传感器融合导航的关键技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2014.
- [6] 郭承军. 多源组合导航系统信息融合关键技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2018.
- [7] ITO K, XIONG K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE transactions on automatic control, 2000, 45(5): 910-927. DOI:10.1109/9.855552.
- [8] 储超, 黄亮, 杜仲进, 等. 抗差估计在 RTK/INS 紧组合中的应用研究[J]. 全球定位系统, 2019, 44(5): 18-25.
- [9] HUBER P J. Robust statistics[M]. New York: Wiley, 1981.
- [10] IZANLOO R, FAKOORIAN S A, YAZDI H S, et al. Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise [C]//2016 Annual Conference on Information Science and Systems(CISS), 2016. DOI:10.1109/CISS.2016.7460553.
- [11] KULIKOVA M V. Square-root algorithms for maximum correntropy estimation of linear discrete-time systems in presence of non-Gaussian noise[J]. Systems and control letters, 2017(108): 8-15. DOI:10.1016/j.sysconle.2017.07.016.
- [12] 全伟, 刘百奇, 宫晓琳. 惯性/天文/卫星组合导航技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.
- [13] WANG M S, WU W Q, ZHOU P Y, et al. State transformation extended Kalman filter for GPS/SINS tightly coupled integration[J]. GPS solutions, 2018, 22(4): 112-123. DOI:10.1007/S1021-018-0773-3.
- [14] KARAMAT T B, ATIA M M, NOURELDIN A. An enhanced error model for EKF-based tightly-coupled integration of GPS and land vehicle's motion sensors[J]. Sensors, 2015, 15(9): 24269-24296. DOI:10.3390/S150924269.

#### 作者简介

**李松** (1996—), 男, 硕士研究生, 主要从事导航定位技术研究。

**唐小妹** (1982—), 女, 副研究员, 主要从事卫星射频电路研究。

**孙鹏跃** (1988—), 男, 讲师, 研究方向为卫星导航信号处理算法。

**张可** (1987—), 男, 讲师, 研究方向为卫星导航系统的算法设计和性能分析。

**王飞雪** (1971—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为卫星导航定位/扩频信号处理、电子系统抗干扰。

## Maximum correntropy Kalman filter for GNSS/INS tightly-coupled integration

LI Song, TANG Xiaomei, SUN Pengyue, ZHANG Ke, WANG Feixue

*(College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology,  
Changsha 410073, China)*

**Abstract:** In real application, the measurement noise is easily affected by gross errors and becomes non-Gaussian distribution, resulting in the performance of the traditional Kalman filter (KF) being degraded significantly. In order to deal with this problem, the maximum correntropy Kalman filter (MCKF) is proposed based on the maximum correntropy criterion (MCC) and M-estimation. Compared with KF, the proposed filter can assign less weight to the abnormal measurements to reduce its influence on the state estimation, and compared with the Huber-based Kalman filter (HKF), it can make more effective use of measurement information, thereby the proposed filter is more robust. The tightly coupled GNSS/INS (global navigation satellite system/inertial navigation system) car-mounted experiments were carried out to verify the performance of the proposed filter. The results show that the KF and HKF achieve bad estimation accuracy due to the poor quality of the original measurements of the GNSS such as the pseudorange and pseudorange rate. And the proposed MCKF can effectively suppress the influence of abnormal measurements, resulting in faster convergence and higher estimation accuracy than existing filters.

**Keywords:** Kalman filtering; GNSS/INS; tightly-coupled; M-estimation; maximum correntropy criterion